Prof. De Gennesの講義

伊豆山　健　夫（東大教養）

題目はGinsburg-Landau Equations and Properties of Type II Superconductorsであり、講義は3回にわたつて行われた。De Gennesはここ数年間、集中的にType II Superconductor を中心とする超電導理論の分野で個性的且つ天才的な仕事を行つている。彼は主として現象論を驅使してなるべく物理的に結論を出し、またソ連のLandauスクールや我国のMaki 氏によるGor'kov 流のGreen関係に基く理論を平易な言葉で翻訳して見せるのが得意である。講義はかなり多くのテーマを含み、またoriginal work の他に教育的な話も多かつた。私はこれを簡単に要領よく紹介する能力を有たない。

先ず例によつて　$F(\mathbf{r}) = \langle \psi_\uparrow(\mathbf{r}) \psi_\downarrow(\mathbf{r}) \rangle$ なるcondensate の amplitude を導入する。超伝導状態では$F(\mathbf{r}) \neq 0$ で、且つ $F(\mathbf{r})$ の位相がコヒーレントである　二つの超伝導体A，Bをjunction で結びつける。junction がA，B間の粒子交換を許さなければ、A，Bそれぞれにいる粒子数N_A，N_Bが一定である。このとき合成系のエネルギーはE_0 であるとする。次にjunctionが粒子交換を許す場合を考える。粒子（フエルミオン）はCooper pairを作つている為に、junction を通じて行われる粒子交換が

$(N_A, N_B) \rightarrow (N_A \pm 2, N_B \mp 2)$　　型のみである場合を考えることが許される。この遷移のマトリクス要素が定数 $-K$ である場合、全系のエネルギーは

$$E = E_0 - 2K \cos\{2(\varphi_A - \varphi_B)\}$$

となる。但し$2\varphi_A$，$2\varphi_B$は、それぞれ、A，Bに於けるcondensate amplitude の位相である。$F_A = |F_A| e^{2i\varphi_A}$。junction を通つて流れるcurrentは

$$J = \partial N_A / \partial t$$

で与えられるが、N_A と φ_A 及び E と t がそれぞれ canonical conjugate であることを用い、更に $N \gg 1$ によつて粒子数と位相とを同時により精度で決めてやることができるので

$$\frac{\partial N_A}{\partial t} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial \varphi_A}$$

$$\therefore \quad J = \frac{2K}{\hbar}\sin\{2(\varphi_A - \varphi_B)\}.$$

他方 $\hbar\dot{\varphi} = \partial E/\partial N = \mu$ 　に注目して

$$\frac{d}{dt}(\varphi_A - \varphi_B) = \frac{1}{\hbar}(\mu_A - \mu_B).$$

junction の間に電位差 V を加えると $\mu_A - \mu_B = eV$ となつて J は angular frequency $(2eV/\hbar)$ で振動する。a c Josephon current はこのようにして簡単に求められる。

一般に一様でない超伝導体では、これを沢山の部分系に分割して、相接する二つの部分系 A，B の間に上の議論を適用すると

$$J \propto \varphi_A - \varphi_B$$

従つて一般に電流密度は

$$\mathbf{J} = C\nabla\varphi$$

であると考えられる。同様にしてエネルギー密度は

$$A + B|\nabla\varphi|^2 + \cdots\cdots$$

となるであろう。

もつと一般的に云つて、超伝導体の自由エネルギー密度は

$$F_s(\mathbf{r}) = F_n(\mathbf{r}) + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4$$

$$+\frac{1}{2m}\left|\left(\hbar\nabla - \frac{2ie\mathbf{A}}{c}\right)\Psi\right|^2 + \frac{H^2}{8\pi}$$

で与えられると考えられる。$F_n(\mathbf{r})$ は Normal State の自由エネルギー密度（乃至その解析接続）である。$\Psi(\mathbf{r})$ は $F(\mathbf{r})$ (Condensate Amplitude) に定数をかけたものであり、上式中の m が電子質量に一致する様にしてある。

$(2ie\mathbf{A}/c)$ の出現は Gauge 不変の要請から明らかである。上記の自由エネルギー密度は Landau の２次相転移理論でよく知られていると思うからここで説明する必要はない。T_c の近傍で $\alpha=$(正の定数)$(T-T_c)$ であり平衡状態に於ける Ψ の熱的平均値は

$$\Psi_0\equiv\sqrt{-\alpha/\beta}\quad (\text{if } T<T_c)\quad \text{or}\quad 0(T>T_c)$$

である。

自由エネルギー $F_S=\int F_S(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ を Ψ 及び $\mathbf{A}$ の変分に関して極小にするという要請から、Ginsburg-Landau の方程式

$$\frac{1}{2m}(\mathbf{p}-\frac{2e\mathbf{A}}{c})\Psi+\beta|\Psi|^2\Psi+\alpha\Psi=0 \tag{1}$$

$$\mathbf{j}\equiv\frac{c}{4\pi}\operatorname{curl}\mathbf{H}=\frac{2e}{m}\mathrm{Re}\{\Psi^*(\mathbf{p}-\frac{2e\mathbf{A}}{c})\Psi\} \tag{2}$$

但し $\mathbf{p}\equiv\frac{\hbar}{i}\nabla$

が得られる。これは unknown parameter α 及び β を含んでいるが、α が所謂 coherence length $\xi(T)$ と

$$\xi^2(T)=\hbar^2/2m|\alpha| \tag{3}$$

によつて結びつけられていることは次のようにすれば分る。$\mathbf{A}=0$ で、$x=0$ に於ては $\Psi=0$，$x\to\infty$ で $\Psi=\Psi_0\equiv\sqrt{-\alpha/\beta}$ となる(1)の解は $\Psi=\Psi_0\tanh(x/\sqrt{2}\,\xi(T))$，ここで $\xi(T)$ は(3)で定義されるものである。このことは $x=0$ に於ける disturbance が、高々 $x\sim\xi(T)$ までにしか尾を引かないことを示している。

次に penetration depth λ を導入する。$\mathbf{A}=0$ で $\Psi=\Psi_0$ とする。弱い磁場を加えてもこの値は変らないだろう。従つて(2)により $\mathbf{j}=-((2e)^2/mc)\times$

$|\Psi_0|^2\mathbf{A}$。故にLandau 方程式：$\nabla^2\mathbf{A}=(1/\lambda^2)\mathbf{A}$，但し $1/\lambda^2\equiv(4\pi(2e)^2/mc^2)|\Psi_0|^2$，が得られる。$T\to T_C$ につれ λ も ξ も ∞になるが、$\kappa\equiv\lambda/\xi$ は T_C 近傍で温度変化を示さない。かくしてGinsburg-Landau のパラメーター κ が導入された。$\kappa=((mc)^2\hbar^2/2\pi(2e)^2)\cdot\beta$ によつてunknown parameter β が κ と結びつくことになつた。$\kappa<1/\sqrt{2}$ の場合はType Ⅰの超伝導体であり、$\kappa>1/\sqrt{2}$ の場合はType Ⅱ の超伝導体であることは、GL方程式を解くことによつて結論される訳である。

さてLandauの2次相転移理論ではorder parameter のゆらぎを計算することができて、Ornstein-Zernike型のゆらぎが得られたことは周知の通りであるが、上記の $F_S(\mathbf{r})$ もゆらぎ $<\Psi(\mathbf{r}_1)\Psi(\mathbf{r}_2)>$ を与えることができる。$T=T_C$ で $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\sim\xi_0\equiv\hbar v_F/k_BT_C$（絶対零度に於けるconherence length）の場合の $<\Psi(\mathbf{r}_1)\Psi(\mathbf{r}_2)>$ を求め、これを絶対零度に於ける $|\Psi|^2$ （～単位体積中の伝導電子の数）で割つたものは一応 T_C 近傍におけるゆらぎの目安を与えると考えてよかろう。この大さは k_BT_C/E_F のオーダーになるから極めて小さいということができる。よつて超伝導の T_C 近傍ではLandau の現象論がそのまま成立つと考えてもよい（とDe Gennes は主張する）。（周知のように、近年、2次相転移がLandauの現象論では説明出来ないことが、多角的に指摘されている）

所で超伝導状態になつている為には $<\Psi>$ が有限であるというだけでは不充分であつて、Ψ の位相がコーヒーレントであつて欲しい。これを議論する為に Ψ の位相 φ のゆらぎを調べる。例として、x方向に延びた一次元のwire を考え、断面は半径 ρ の円であるとする。このとき $\Psi=|\Psi_0|e^{i\varphi(x)}$ として、その絶対値は一定に保たれ、位相だけがx方向で変動できると考える。

$$\mathscr{F}_S=\mathscr{F}_0+\pi\rho^2\frac{\hbar^2}{2m}|\Psi_0|^2\sum_k k^2|\varphi_k|^2$$

但し φ_k は $\varphi(x)$ の Fourier 成分である。φ_k を classical variable と看做すことが許される場合には

$$<|\varphi_k|^2>=mk_BT/\hbar^2|\Psi_0|^2\pi\rho^2k^2$$

が得られる。これより $<\varphi(0)\varphi(x)>\sim(\lambda_F/\rho)^2\xi_0^{-1}\cdot x$. 10 cm も離れれば $<\varphi(0)\varphi(x)>\sim 1$ となつて coherence は切れてしまう。また $<|\varphi_k|^2>\propto k^{-2}$ であることは2次元、3次元でも成立つ。従つて2次元では $<\varphi(0)\ \varphi(\mathbf{r})>\sim\log|\mathbf{r}|$ となり、3次元になつてやつとこのゆらぎは収束する。

3回目の講義は Some Microscopic Discussion on Landau-Ginsburg と題するものであつた。初めの2回にわたつて行われた現象論からは一応離れる。電子1及び2の間の相互作用は δ 関数型の引力 $-V\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ であるとし s-State pairing だけを考える。Local order parameter は

$$\Delta(\mathbf{r})\equiv V<\psi_\uparrow(\mathbf{r})\ \psi_\downarrow(\mathbf{r})>$$

であり、$\Delta\neq 0$ の場合の準粒子のエネルギー ϵ_n, 波動関数 $(u_n,\ v_n)$ は、Bogoliubov の方程式

$$\epsilon_n\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathcal{H}_0-E_F & \Delta\\ \Delta^* & \mathcal{H}_0-E_F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}\tag{4}$$

によつて決る。$\mathcal{H}_0$ は一電子ハミルトニアンであつて、磁場や周期場、不純物ポテンシャル等を含む。$\Delta=0$ のとき、準粒子のエネルギー ξ_n, 波動関数 w_n は $(\mathcal{H}_0-E_F)w_n=\xi_n w_n$ を充す。上の Bogoliubov 方程式(4)を Δ を摂動にして一次まで採つて解く。

$$\epsilon_n=\xi_n+\sum_{m\neq n}\frac{|\int w_n^*(\mathbf{r})\,\Delta(\mathbf{r})K\,w_m(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\,|^2}{\xi_n+\xi_m}\tag{5}$$

となる。ここにKは時間逆転の演算子 $Kw_m=w_m^*$ である。$\psi(\mathbf{r})$ を $(u_n,\ v_n)$ で展開し、この一次摂動によつて求められた $(u_n,\ v_n)$ をこれに代入し、かくして与えられる $\psi(\mathbf{r})$ を $\Delta(\mathbf{r})$ の定義式に代入し、これを Δ に関し線型化すると、self-consistency の条件

$$\Delta(\mathbf{r})=\int R(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\Delta(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'\tag{6}$$

が得られる。w_n を用いて $R(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ を表わすことは容易である。$R(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ のひろがりは pure metal では $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\sim\xi_0\sim\hbar v_F/k_BT_c$ 程度であり、電子の

Professor Pinesの講義をきいてmean free path ℓ が Pippard の coherence length ξ_0 よりずつと小さいdirty superconductor では $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\sim\sqrt{\xi_0\ell}$ であることが結論される。

(6)に基く議論は T_c の近傍、或は Δ の小さい場合にしか適用出来ないことは自明である。更に、BCS理論が成立つ超伝導体では、準粒子エネルギー ϵ_n を Δ によつてTaylor 展開することは―― 特にFermi 面 $\xi_n=0$ の近傍で――許されないことになる。これに反しもし、$\xi_n=0$ の近傍に於てさえ、order parameter の Δ に関する展開が許されるのであれば、order parameterの出現による素励起スペクトルの変化は本質的なものではなく、せいぜいmass shift が現われる位のものであろう。そのような超伝導は素励起スペクトルにGap を有たない。(周知のようにparamagnetic impurities を含む超伝導体はGapless になり得る―― Abrikosov and Gor'kov (1960)) 超伝導体がBCS型であるか、Gapless であるかは素励起スペクトルを Δ で展開したときの最低次の項 ((5)の右辺才2項)が、フエルミ準位の位置 ($\xi_n=0$) で発散してしまうか、有限であるか、によつて判別される。それは亦

$$I(t)=\langle\Delta(\mathbf{r}(0))K(0)\Delta(\mathbf{r}(t))K(t)\rangle$$

の power spectrum

$$I(\omega)=\sum_m|\langle w_n|\Delta\cdot K|w_m\rangle|^2\delta(\xi_m+\xi_n-\hbar\omega)$$

が $\omega=0$ に特異点をもつ (BCS型)か否(Gapless)かによつて識別される。但し $K(t)$ は Heisenberg picture に於ける時間逆転の演算子で、$\mathbf{r}(t)$は電子の classical trajectory を記述する。BCS型の場合 $\lim_{t\to\infty}I(t)\neq0$, Gapless の場合 $\lim I(t)=0$。

幾つかの例によつて $\lim_{t\to\infty}I(t)$ が調べられたが、此処では type II の超伝導体は総て(dirty であつても clean であつても) $H\sim H_{c2}$ で Gapless であると結論されたことだけを報告する。

(u_n, v_n)の Δ に関する摂動計算に於て、Δ の次数を上げてやれば self-Consistency (6)の右辺には更に Δ^3 の項が出現する。Δ^3 まで採り入れた

Self-Consistency の式は Ginsburg-Landau の方程式に帰着する。このようにして G.L. 方程式の現象論的パラメーター u , v をミクロな量（V, N(0), … etc.）で表わすことが出来る。